弗完全逻辑 P_1 及其容忍悖论的逻辑机制

郝旭东,张建军
(南京大学 哲学系,南京 210023)

摘要:弗完全逻辑 P_1 是一种允许一个命题及其否定可以同时都为假的逻辑系统,即在该逻辑系统中一般意义的排中律将不再有效。文章在给出的标准语法和语义的基础上,对弗完全否定的逻辑涵义进行了直观解释,并分析了其逻辑语义特征;给出了弗完全逻辑拟真值表的具体列法,表明了系统 P_1 的可判定性;利用拟真值表方法,表明了一般意义排中律在 P_1 中的失效;对弗完全逻辑 P_1 可以容忍逻辑悖论的逻辑机制进行了解析,并就此将弗协调逻辑 C_1 和 P_1 进行了容忍能力的比较。

关键词:弗完全逻辑;排中律;真矛盾;逻辑悖论;弗协调

中图分类号:B815　**文献标志码:**A　**文章编号:**1000-5315(2015)01-0010-05

"弗完全"(paracomplete)是"弗协调"(paraconsistent,又译"次协调"、"亚相容"、"超一致"等)的对偶(dual)概念,此概念最早是由弗协调逻辑学家罗普瑞克、达·科斯塔、马可尼等人在上世纪 80 年代中期引入的。弗协调逻辑的特异性质是一般意义的矛盾律在其逻辑系统中失效,而弗完全逻辑则是指那些一般意义的排中律在其中失效的逻辑系统。使得矛盾律失效也许会引起不小的争议,但许多逻辑学家可以接受经典排中律在某些逻辑系统中的失效。因为卢卡西维茨、波斯特、布劳威尔、海廷等人在多值逻辑、直觉主义逻辑的工作,足以表明经典排中律在逻辑直觉明晰性上的缺乏。正是在这个意义上,达·科斯塔和马可尼认为,直觉主义逻辑和一些多值逻辑都是弗完全的[1]。弗完全概念的提出,也使得诸多经典排中律在其中失效的逻辑系统因此而归为了同类。

一　弗完全逻辑的提出与发展

需要首先明确的是,尽管直觉主义逻辑和一些多值逻辑可以划归为弗完全逻辑,但这三者之间在诞生缘由、发展历程和构建的方法与目的上有着根本不同。本文所讨论的弗完全逻辑,主要是指那些通过使用类似于构建弗协调逻辑的方法而构建出来的弗完全逻辑;因而,本文考察弗完全逻辑思想和理论的角度,也是以弗协调逻辑为基始的。

罗普瑞克和达·科斯塔于 1984 年在《弗协调性、弗完全性和赋值》[2]一文中首次明确定义了"弗完全逻辑"概念:如果某个理论允许一个命题及其否定同时都为假,那么该理论就是弗完全的;允许一个公式及其否定可以同时为假,从而可用作弗完全理论之基础的逻辑系统,就是弗完全逻辑。该文首次使用了弗完全理论、弗完全逻辑概念,但并没有给出一个具体的弗完全逻辑系统。但很快,达·科斯塔和马可尼便于 1986 年在《弗完全逻辑注记》[1]一文中较为完整地给出了弗完全逻辑系统 P_1,并象征性地给出了 P_1 的(类似于弗协调逻辑 $Cn(1 \leqslant n \leqslant \omega)$ 的)系列系统 $Pn(1 \leqslant n \leqslant$

收稿日期:2014-10-10
作者简介:郝旭东(1974—),男,山东莘县人,南京大学哲学系博士后,华东师范大学哲学系副教授、硕士生导师;
张建军(1963—),男,河北沧州人,南京大学哲学系教授、博士生导师。

ω),特别是明确地给出了弗完全逻辑系统 P_1 的大体框架(其语法和语义将在后文单独介绍)。达·科斯塔和马可尼在该文中所构建的弗完全逻辑系统 P_1 的面貌大体类似于弗协调逻辑 C_1,并且使得经典排中律失效的逻辑方法也与 C_1 相类似。因此,在这个意义上,达·科斯塔和马可尼称 P_1 与 C_1 是对偶的。这也是在弗协调逻辑领域第一次开始使用术语“对偶”。

此后,阿贝尔和雅玛施塔于 1995 年在《论拟真势逻辑》[3]一文中对 P_1 的一些具有明显逻辑特征内定理进行了补充。此外,贝兹奥于 1999 年在《弗协调逻辑的前景》[4]一文中探讨了弗协调逻辑和弗完全逻辑之间的对偶关系,他形象地用游戏比喻说,有的游戏可以双方都赢,弗协调逻辑适用于此;而弗完全逻辑则适用于那种双方都可以输的游戏。贝兹奥认为弗协调逻辑与弗完全逻辑犹如一对夫妻,他也由此而断言,对于每一种弗协调逻辑都存在一个与之对偶的弗完全逻辑;并且,对于每一种弗完全逻辑也都存在一个与之对偶的弗协调逻辑。显然,概念“对偶”在此处的意义已经更加明确和严格了。换言之,这意味着对偶并不是一个十分宽泛的概念。比如,商讨逻辑是一种弃合型弗协调逻辑(即放弃经典逻辑合取原则的一种弗协调逻辑,详见张清宇《弗协调逻辑》[5]195-229。下述正加型弗协调逻辑亦参见该文献),弗完全逻辑 P_1 只是正加型弗协调逻辑 C_1 的对偶逻辑,而不是商讨逻辑的对偶逻辑。

作为弗协调逻辑 C_1 的对偶逻辑,弗完全逻辑 P_1 也具有与之类似的、可以容忍真矛盾(dialetheia 或 true contradiction[6]3-6)的逻辑特性;这种特异的逻辑特性也可以作为某些真矛盾(例如悖论)的处理和解决方案。比如,菲尔德于 2008 年在《从悖论中拯救真理》[7]一书中大篇幅地讨论了悖论的弗完全解决方案;李慧华、王文方则撰文《试论语义悖论的弗完全理论》[8],对菲尔德的方案进行了深入解读和剖析,并对其给予了积极评价。尽管菲尔德的弗完全方案与 P_1 不属于同一种弗完全思想(前者属于普利斯特所建立的悖论逻辑[6]221-228的对偶逻辑,而后者属于正加型弗协调逻辑的对偶逻辑),但两者的基本思想是相通的,即都通过各自不同的逻辑措施,使得一般意义的排中律不再有效。而这种相通的基本思想,也使得它们具有相类似的逻辑功用(即弗完全逻辑 P_1 也具有解决和处理某些“真矛盾”的逻辑功效,我们将在后文详述)。

二　弗完全逻辑 P_1 的公理模式、语义赋值及其特征

P_1 的公理模式如下:

(1) $A\to(B\to A)$;

(2) $(A\to B)\to(A\to(B\to C)\to(A\to C))$;

(3) $A\to(B\to A\wedge B)$;

(4) $A\wedge B\to A$;

(5) $A\wedge B\to B$;

(6) $(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$;

(7) $A\to A\vee B$;

(8) $B\to A\vee B$;

(9) $((A\to B)\to A)\to A$;

(10) $\neg(A\wedge\neg A)$;

(11) $A\to\neg\neg A$;

(12) $A\to(\neg A\to B)$;

(13) $A^*\to((A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))$;

(14) $A^*\wedge B^*\to(A\wedge B)^*\wedge(A\vee B)^*\wedge(A\to B)^*$;

(15) $A^*\to(\neg A)^*$。

其中,公理模式(13)-(15)中算子“∗”的作用类似于弗协调逻辑中的“o”(参见张清宇《弗协调逻辑研究》[5]13)。例如,公理模式(14)的直观含义是如果 A 和 B 都是遵守排中律的,那么$(A\wedge B)$、$(A\vee B)$、$(A\to B)$也都遵守排中律(严格来讲,$A^*=_{df}(A\vee\neg A)$。$A^*=_{df}(A\vee\neg A)$)

P_1 的推理规则:(R_1)由 A 和 $A\to B$ 可推出 B。

P_1 的语义赋值:一个赋值 V 就是从 P_1 的公式集到集合{0,1}上的一个映射,并且满足下列条件(参见 Loprić and da Costa,(1984)[2]和 Da Costa and Marconi (1986)[1]):

(1)若 $V(A)=1$,则 $V(\neg A)=0$;

(2)若 $V(A)\neq V(\neg A)$,则 $V(\neg A)\neq V(\neg\neg A)$;

(3)若 $V(A^*)=V(A\to B)=V(A\to\neg B)=1$,则 $V(A)=0$;

(4) $V(A\to B)=1$,当且仅当:$V(A)=0$ 或 $V(B)=1$;

(5) $V(A\wedge B)=1$,当且仅当:$V(A)=1$ 且 $V(B)=1$;

(6) $V(A\vee B)=1$,当且仅当:$V(A)=1$ 或 $V(B)=1$;

(7)若 $V(A)\neq V(\neg A)$ 且 $V(B)\neq V(\neg B)$,则 $V(A\wedge B)\neq V(\neg(A\wedge B))$,$V(A\vee B)\neq V(\neg(A\vee B))$,$V(A\to B)\neq V(\neg(A\to B))$;

(8) $V(\neg(A\wedge\neg A))=1$。

从以上语义赋值定义可见,弗完全逻辑 P_1 有如下语义赋值特征:

第一,赋值定义 1(1)要求:当 A 为真时,则¬A 为假。这里,是“如果……那么……”,而不是像经典逻辑那样是“当且仅当”。所以,当 A 为假时,对¬A 的值就没有更多要求,即此时¬A 可真可假;亦即,当 A 为假时,¬A 与 A 可以同时为假。

第二,赋值定义(2)要求:当 A 为真时,则¬¬A 为真。但当 A 为假时,对¬¬A 的值没有要求,即此时 A 可真可假;亦即,当¬¬A 为真时,¬¬A 与 A 可以同时为假(当然亦可同真)。综合以上两个赋值特征,A、¬A 和¬¬A 之间的真假关系为(见表 1 所示):A 与¬A 不能同时为真,但可以同时为假;¬A 与¬¬A 不能同时为真,但也可以同时为假。这两个特征其实也就是说,一个命题及其否定可以同时都为假。所以,在这种二值的语义赋值之下,一般意义上的排中律不再有效。

表 1

A	¬A	¬¬A
1	0	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

第三,赋值定义 1(7)的直观含义是指,如果 A 和 B 的语义赋值遵守排中律,那么 A∧B、A∨B、A→B 的语义赋值也都遵守排中律。相对应的是,$V(A^*)=0$,则表示 A 的语义赋值不遵守排中律。由该赋值定义可知,这种赋值显然与经典逻辑不同,即 P_1-公式的赋值是非真值函项的,其公式的值并非完全由它所包含的命题符的真值所决定。

三　弗完全逻辑 P_1 的可判定性及其拟真值表

P_1 是可判定的,即我们可以在有穷步内以能行程序判定一个公式是否为其定理。与经典逻辑不同,一个 P_1-公式的值并不是完全由其子公式的值所决定,还涉及到这些子公式的否定式的值。所以,我们不能像经典逻辑那样,仅仅直接使用真值表来判定一个 P_1-公式是否为 P_1-定理。为此,我们把一个公式 A 的子公式以及 A 的真子公式的否定,统称为拟子公式,这样 A 的值就由它的拟子公式所决定。由此,我们用构造拟真值表的方法来判定一个 P_1-公式是否为 P_1-定理。以杜国平(2006)[9]228 所给 C_n 的拟真值表为基础,根据本文的定义 1,给定任意一个 P_1-公式 A,其拟真值表的构造步骤如下。

第一步,相同于经典逻辑做真值表的情形,列出 A 中所有出现的命题符,并列出这些命题符的各种取值情况。

第二步,为表中所有的命题符的否定各辟出一列,并逐行做如下运算:

若已知命题符 p 在该行取值为 0,则将此行裂分为两行:¬p 在所得裂分的第一行的值为 1,此值左面的值保持跟裂分前的相同;¬p 在所得裂分的第二行的取值为 0,此值左面的值保持跟裂分前的相同。

第三步,列出 A 的拟子公式并逐行计算它的值。若此拟子公式自身的所有的真拟子公式都已列出并且它们在各行中的值都已得到,则列出此拟子公式并逐行求值如下:

1.当所考虑的拟子公式不是否定式时,求值同经典逻辑的方法。

2.当所考虑的拟子公式为否定式¬A′时,在 A′取值为 1 的行中¬A′的取值为 0;在 A′取值为 0 的行中¬A′的取值方法如下:

(1)如果 A′是否定式¬B(即,要给出¬¬B 的取值),那么需看 B 和¬B 的值是否相等:

如果不等,那么¬A′与 A 的取值不等。

如果相等,那么将该行裂分为两行,第一行¬A′的取值为 1;第二行¬A′的取值为 0。

(2)如果 A′为 B∧C,B∨C,B→C,则有两种情况需要考虑:

①如果 A′形如 D∨¬D 或¬D∨D,那么将该行裂分为两行,在第一行¬A′的取值为 1,在第二行¬A′的取值为 0;

②如果 A′并非形如 D∨¬D 或¬D∨D,那么当 B 和¬B 的值不同并且 C 和¬C 的值也不同时,¬A′与 A 的取值不等;否则,该行裂分为两行,在第一行¬A′的取值为 1,在第二行¬A′的取值为 0(但当 A′形如 D∧¬D 时,¬A′的取值为 1)。

通过上述的方法,可以最终得到公式 A 在 P_1 中的取值。若公式 A 在拟真值表的最后一列全部都取 1,则公式 A 是 P_1-定理(由公式的最后一列为真,根据系统 P_1 的可靠性,可推断出该公式为系统的定理;而根据赋值定义易证公理都是有效的,规则 R_1 也是保真的,因而系统 P_1 是可靠性的)。例如,通过拟真值表的方法可以有如下推论。

推论:如下公式不是 P_1-定理[Abar(1995)[3],

Da Costa, Marconi, (1986)[1]]:

(1) $A \vee \neg A$　　(2) $\neg\neg A \to A$

(3) $B \to (A \vee \neg A)$

(4) $\neg B \to (A \vee \neg A)$

(5) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

(6) $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

(7) $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

(8) A^* (即, $A \vee \neg A$)

(9) $(\neg A)^*$

(10) $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$

(11) $(A \to \neg A) \to A$

例如,列(1)和(2)的拟真值表如表 2:

表 2

A	¬A	A∨¬A
1	0	1
	1	1
0		
	0	0

表(a)

A	¬A	¬¬A	¬¬A→A
1	0	1	1
	1	1	1
0			
		1	0
	0		
		0	1

表(b)

表(a)的最后一列并非都取 1,表明一般意义排中律在 P_1 中不再有效;表(b)的最后一列也并非都取 1,表明双重否定律在 P_1 中不再有效。

四　P_1 作为解悖方案的逻辑机制

为对 P_1 进行解悖方案的考察,首先,我们应该清楚什么是严格意义的逻辑悖论。张建军曾基于对悖论构成要素的考察和国内外悖论定义的比较研究而给出如下定义:"逻辑悖论指谓这样的一种理论事实或状况,在某些公认正确的背景知识之下,可以合乎逻辑地建立两个矛盾语句相互推出的矛盾等价式。"[10]7 尽管这样的定义在学界尚有争议,但如果仅从形式特征来考察,在悖论中"可以建构矛盾等价式"这一点是拥有共识的。而悖论对理论本身的危害正是来源于此。在经典逻辑中有一条定理:$(A \leftrightarrow \neg A) \to B$,它意味着如果公式"$A \leftrightarrow \neg A$"成立,那么就会导致任意的公式都成立。具体到某个理论就是,如果某个理论中存在逻辑形式为"$A \leftrightarrow \neg A$"的命题,就会"在逻辑上"导致任意的命题都在该理论中成立。显然,这样的理论是没有意义的,是不足道的(trivial)。然而,这种"在逻辑上"导致的"不足道"的结果是基于一定逻辑基础的,这个逻辑基础就是经典逻辑。也就是说,以经典逻辑为基础,存在悖论就意味着不足道,就意味着无意义。但事实上情况并非如此简单,因为确实存在那些尽管自身包含悖论,但仍然有意义的理论,最典型的莫过于朴素集合论。尽管其中包含有众所周知的罗素悖论,但将之使用于日常思维领域却丝毫没有什么障碍。当然,这些包含悖论的理论可以弗协调逻辑为基础,但弗完全逻辑 P_1 也具有类似的作用。因为如下的拟真值表可以表明公式 $(A \leftrightarrow \neg A) \to B$ 也不是弗完全逻辑 P_1 的定理。由于 $(A \leftrightarrow \neg A) \to B$ 是 $(A \to \neg A) \wedge (\neg A \to A) \to B$ 的缩写,所以下面我们列出后者的拟真值如表 3:

表 3

A	B	¬A	A→¬A	¬A→A	(A→¬A)∧(¬A→A)	(A→¬A)∧(¬A→A)→B
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
		1	1	0	0	1
	0					
1						
		0	0	0	0	1
		1	1	0	0	1
	0					
0						
		0	1	1	1	0

实际上,公式 $(A \leftrightarrow \neg A) \to B$ 起到的作用与司各脱法则 $(A \wedge \neg A \to B)$ 的作用是类似的,也可以将之看作是司各脱法则的另一表达式。它们共同的后果是,都会导致前提不良后果在系统中的扩散,导致系统的不足道。可以说,公式 $(A \leftrightarrow \neg A) \to B$ 不再是定理,是弗完全逻辑 P_1 可以避免某些悖论的不良后果的最直接的逻辑机制体现。这也就是说,类似于弗协调逻辑,弗完全逻辑也具有某些处理真矛盾的能力。这些真矛盾可以是某些悖论、道义二难、司法冲突等。需要强调的是,弗完全逻辑 P_1 只能处理某些真矛盾。比如,对于悖论而言,弗完全逻辑不能处理寇里(Curry)悖论以及类寇里悖论,因为该悖论的产生与否定词并没有直接的关系(当然,对于该类型的悖论,弗协调逻辑也无力处理)[10]65。概括来讲,弗完全逻辑只能处理与否定词有直接关系的,并且逻辑形式为"$A \leftrightarrow \neg A$"的那些真矛盾。

那么,相对于弗协调逻辑 C_1 对真矛盾的处理能力,两者差别在何处呢? 我们知道,在弗协调逻辑 C_1 中,矛盾律受到限制,但排中律无限制;在弗完全逻辑 P_1 中,排中律受到限制,但矛盾律无限制。而矛盾律的逻辑要求比排中律更强一些,所以相对来说,仅矛盾律受限制的 C_1 比 P_1 更弱一些,因而可以处理相对更多一些的真矛盾;而仅排中律受限制的 P_1 比 C_1 更强一些,因而其处理真矛盾的能力相对就要弱一些。而导致爆炸后果的 $(A \leftrightarrow \neg A) \to B$ 与 $(A \wedge \neg A \to B)$ 是否有效,则是这种区别的最直接体现。由推论 2 可知,$(A \wedge \neg A \to B)$ 在 P_1 中仍然成

立,但由列出的拟真值表可知,这两者都不是 C_1 定理,这就意味着 C_1 比 P_1 具有更强的真矛盾处理能力。更具体地说,弗完全逻辑 P_1 可以处理形如“$A \leftrightarrow \neg A$”的真矛盾,但弗协调逻辑 C_1 却可以处理形如“$A \leftrightarrow \neg A$”和“$A \wedge \neg A$”的真矛盾。例如,弗协调逻辑 C_1 可以容忍“辩证命题”,但弗完全逻辑 P_1 则不可以。这也表明,P_1 的真矛盾处理能力要弱于 C_1;或者说,P_1 对真矛盾的容忍度要低于 C_1。

参考文献:

[1]DA COSTA N C A, MARCONI D. A Note on Paracomplete Logic[J]. *Rendiconti dell' Accademia Nazionale dei Lincei*, 1986,(80).

[2]LOPRI C A, DA COSTA N C A. Paraconsistency, Paracompleteness, and Valuation[J]. *Logique et Analyse*, 1984,(27).

[3]ABAR C A A P, YAMASHITA M. On Non-alethic Logic[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 1995,(945).

[4]B ÉZIAU J-Y. The Future of Paraconsistent Logic[J]. *Logical Studies*, 1999,(2).

[5]张清宇.弗协调逻辑[M].北京:中国社会出版社,2003.

[6]PRIEST G. *In contradiction: a Study of the Transconsistent* [M]. Oxford: Clarendon Press, 2006.

[7]FIELD H. *Saving Truth from Paradox* [M]. New York: Oxford University Press, 2008.

[8]李慧华,王文方.试论语义悖论的弗完全理论[J].逻辑学研究,2011,(4).

[9]杜国平.经典逻辑与非经典逻辑基础[M].北京:高等教育出版社,2006.

[10]张建军.逻辑悖论研究引论(修订本)[M].北京:人民出版社,2014.

Paracomplete Logic P_1 and Logic Mechanism of Tolerate Paradox

HAO Xu-dong, ZHANG Jian-jun

(Department of Philosophy, Nanjing University, Jiangsu, Nanjing 210023, China)

Abstract: Paracomplete logic P_1 is a logic system allowing a proposition and its negation to be false at the same time, i.e., the general law of excluded middle in this logic system would be futile. Based on the standard grammar and syntax, this paper explains the logic implication of paracomplete negation, analyzes the logic syntactic characteristics, testifies the decidability of paracomplete logic quasi matrix with specific lining method, demonstrates the futility of general law of excluded middle in P_1 with quasi matrix method, analyzes the logic mechanism of paracomplete logic P_1's tolerance on logic paradox, and thus compares paraconsistent logic C_1 and P_1 on their tolerant ability.

Key words: paracomplete logic; the law of excluded middle; true contradiction; logic paradox; paraconsistent

[责任编辑:张 卉]